Концепция наклонного струнного волнографа для измерения параметров поверхностного волнения

Железнова Е.М, Караев В.Ю., Титченко Ю.А., Зуйкова Э.М., Ковалдов Д.А.

Институт прикладной физики имени А.В. Гапонова-Грехова РАН,
Российская академия наук, Нижний Новгород, Россия

Введение

Струнные волнографы предназначены для измерения колебаний уровня свободной поверхности воды. Их работа основана на изменении электрических характеристик чувствительного элемента (струны) при изменении глубины его погружения.

Рассматриваются два типа приборов: **резистивный**, регистрирующий изменение электрического сопротивления, и ёмкостный, основанный на изменении электрической ёмкости. Выбор конструкции определяется электрическими свойствами среды, которые различаются для пресной и морской воды.

Основная цель исследования — изучить особенности работы **наклонного струнного волнографа** и определить, как угол наклона струны и параметры волны влияют на измеряемый сигнал. В отличие от вертикального датчика, наклонная струна позволяет исследовать влияние не только изменения высоты поверхности, но и горизонтального перемещения волнового профиля на положение точки пересечения струны с водой.

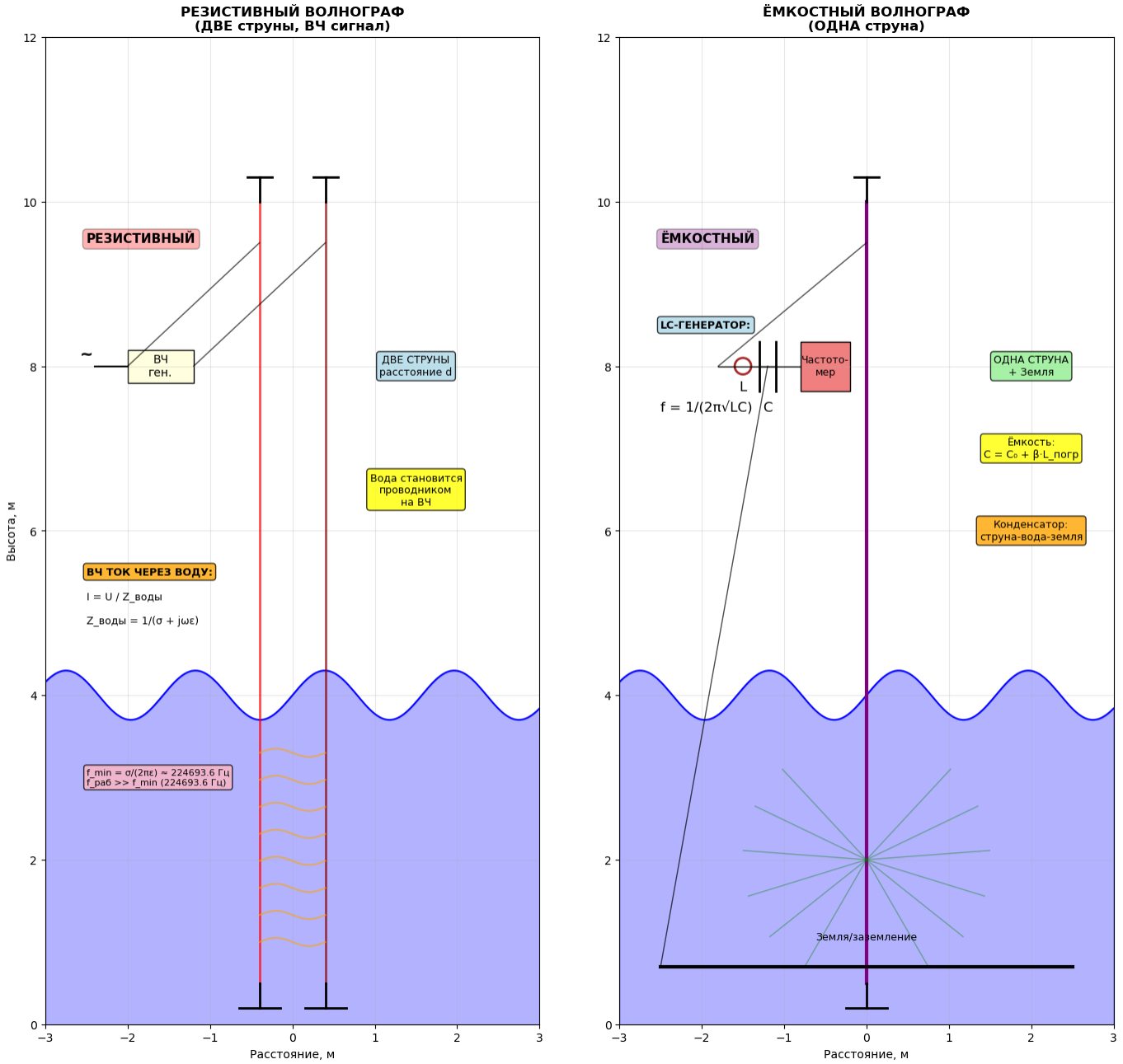
Также рассматривается возможность определения характеристик распространения волн по сигналу наклонного волнографа.

Резистивный и емкостный волнограф в пресной воде

Удельная проводимость:
σ ≈ 0.0005–0.001 См/м

Удельное сопротивление:
ρ = 1/σ ≈ 1000–2000 Ом·м

Пресная вода — это *диэлектрик* с малыми потерями. Она плохо проводит электрический ток. В такой воде очень мало растворенных солей, поэтому свободных ионов (носителей заряда) почти нет.



Резистивный и емкостный волнограф в морской (соленой) воде

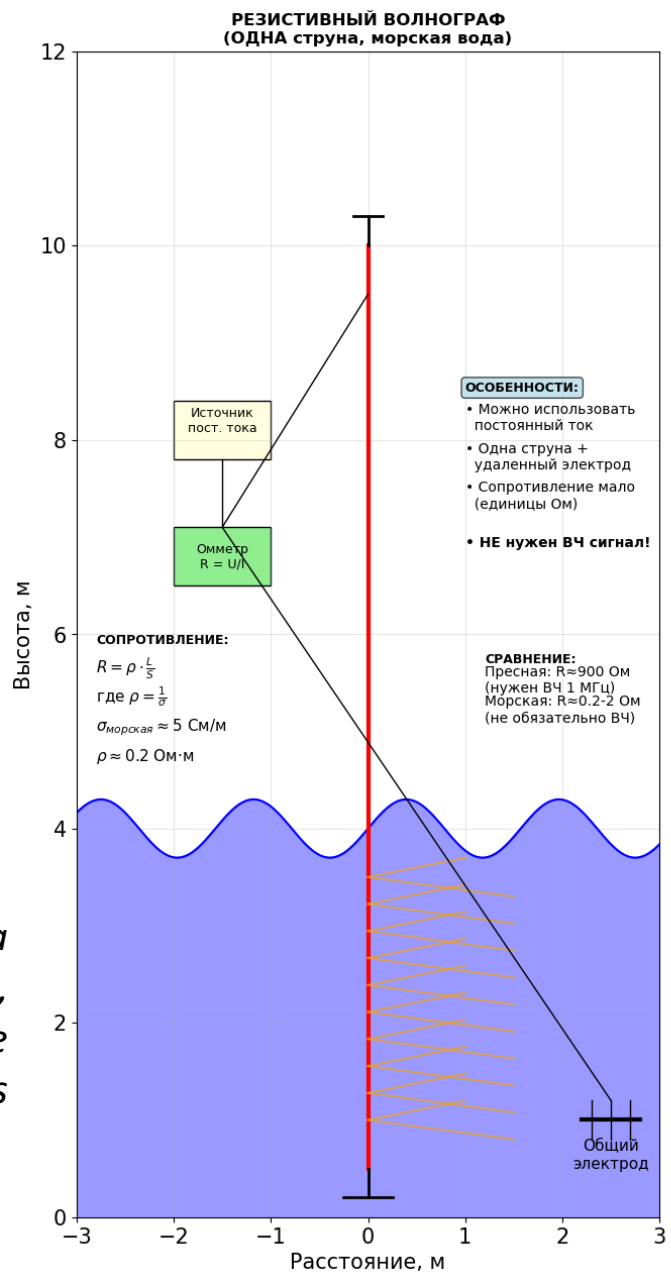
Удельная проводимость:
σ ≈ 3–5 См/м

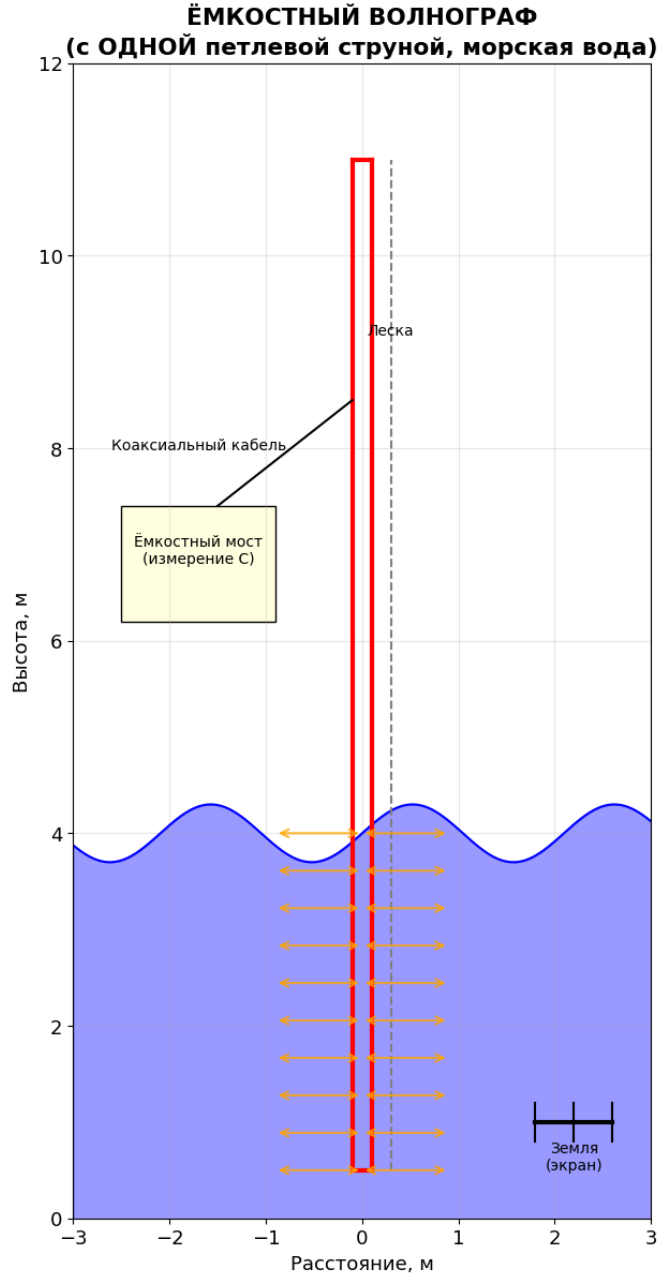
Удельное сопротивление:
ρ = 1/σ ≈ 0.2–0.33 Ом·м

Электропроводность морской воды определяется наличием растворённых солей.

Средняя *солёность* морской воды составляет 32-37 г.

Подобное устройство емкостного волнографа описано в статье Zuikova E.M., Titchenko Yu.A., Kovalov D.A., Karaev V.Yu., Titov V.I. String Wave Gauge with a Shielded Wire for Wave Measurements // Physical Oceanography. 2025.





Оценка сопротивления струн и воды

σ=0,001 См/м, ω=2πf рад/с
ε_0=8.854×10^{-12} Ф/м r=0,1 мм, d=1 см, L=6 м, η=0 м
ε_r=80 Материал струн – нихром:
$\varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r$ =7,08×10^{-10} Ф/м ρ=1,12 Ом×мм^2/м

Для пресной воды импеданс: $Z_{\text{воды}} = \dfrac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}$

Минимальная частота определяется условием доминирования тока смещения над током проводимости:

$$f_{min} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon} \approx 225\ \text{кГц}$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z_{\text{общ}} = Z_{\text{стр1,над}} + Z_{\text{воды}} + Z_{\text{стр2,над}}$$

$$Z_{\text{общ}}(\eta) = \underbrace{2\rho\frac{\frac{L}{2}-\eta}{S}}_{\text{струны над водой}} + \underbrace{\frac{l \cdot k_{\text{геом}}}{\sqrt{\sigma^2 + (\omega\varepsilon)^2}}}_{\text{вода}}$$

Таблица 1. Расчеты сопротивления для высокочастотного режима

Частота	$Z_{\text{воды}}$, Ом	$Z_{\text{струны над}}$, Ом
225 кГц	3108,44	214,01
500 кГц	1803,42	
1.0 МГц	964,58	
2.0 МГц	491,23	
4.0 МГц	246,75	
5.0 МГц	197,53	
10.0 МГц	98,84	

Таблица 2. Расчеты сопротивления для низкочастотного режима

Частота	Z воды, Ом	Z струны над, Ом
10 кГц	4393,27	214,01
20 кГц	4380,31	
30 кГц	4358,97	
50 кГц	4292,71	
100 кГц	4017,99	
225 кГц	3108,44	

Соответственно от частоты будет зависеть, насколько мало второе слагаемое (сопротивление воды). С ростом частоты увеличивается вклад тока смещения относительно тока проводимости. Поэтому частотный режим влияет на полный импеданс измерительной цепи и чувствительность волнографа.

Решения для вертикального волнографа. Низкочастотный режим.

Резистивный случай

$$R(t) = 2\rho \cdot \frac{L/2 - \eta(t)}{S} + \frac{(L/2 + \eta(t)) \cdot k_{\text{геом}}}{\sqrt{\sigma^2 + (\omega\varepsilon)^2}}$$

$$R_{max} = \frac{\rho L}{S} + \frac{L \cdot k_{\text{геом}}}{2\sqrt{\sigma^2 + (\omega\varepsilon)^2}} \ (\text{при } \eta = 0)$$

$$\alpha = \frac{2\rho}{S} - \frac{k_{\text{геом}}}{\sqrt{\sigma^2 + (\omega\varepsilon)^2}}, \ k_{\text{геом}} = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{d}{r}\right)$$

$$\mathrm{K_R} = -\mathrm{I}_R \cdot \alpha = -\mathrm{I}_R\left(\frac{2\rho}{S} - \frac{k_{\text{геом}}}{\sqrt{\sigma^2 + (\omega\varepsilon)^2}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$R(t) = R_{max} - \alpha \cdot \eta(t)$$

$$U_R(t) = I_R \cdot R(t) = I_R \cdot R_{max} - I_R \cdot \alpha \cdot \eta(t) = \mathrm{U_{offset}} + \mathrm{K_R} \cdot \eta(t)$$

Емкостный случай

$$U_C(t) = \underbrace{I_c \frac{\frac{L}{2}}{\sigma} k_{\text{геом}}}_{\mathrm{U_{offset_C}}} + \underbrace{I_c \frac{k_{\text{геом}}}{\sigma}\left(1 - \frac{\frac{2\pi f \mathrm{C}_0 \left(\frac{L}{2}\right) k_{\text{геом}}}{\sigma}}{1 + \left(\frac{2\pi f \mathrm{C}_0 \left(\frac{L}{2}\right) k_{\text{геом}}}{\sigma}\right)^2}\right)}_{K_C} \cdot \eta(t)$$

L — полная длина струны

η(t) — высота воды от нулевого уровня

$R_{\max}$ *— сопротивление при струне полностью над водой*

α — сопротивление на 1 метр длины

$\mathrm{U_{offset}}$ *— постоянное смещение*

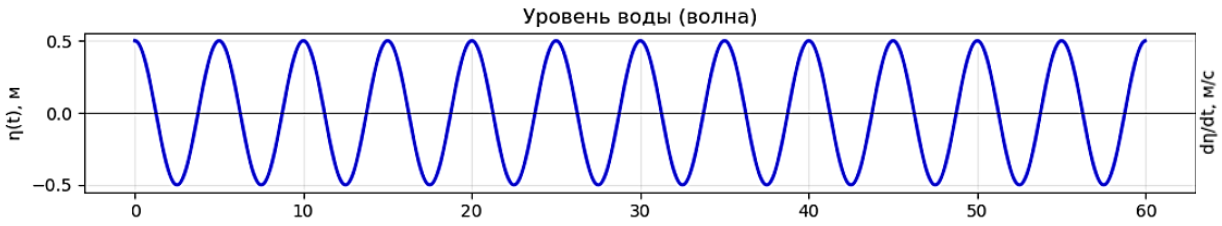
$\mathrm{K_R}, \mathrm{K}_C$ *— чувствительность*

Ic – ток

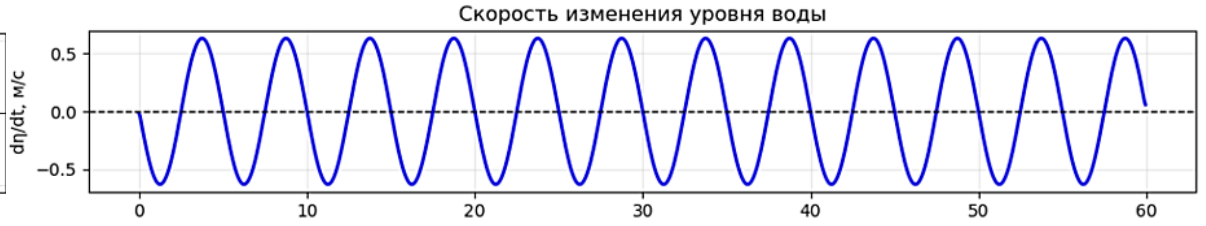
C_0 *– емкость при среднем уровне*

d — расстояние от струны до заземлённого экрана

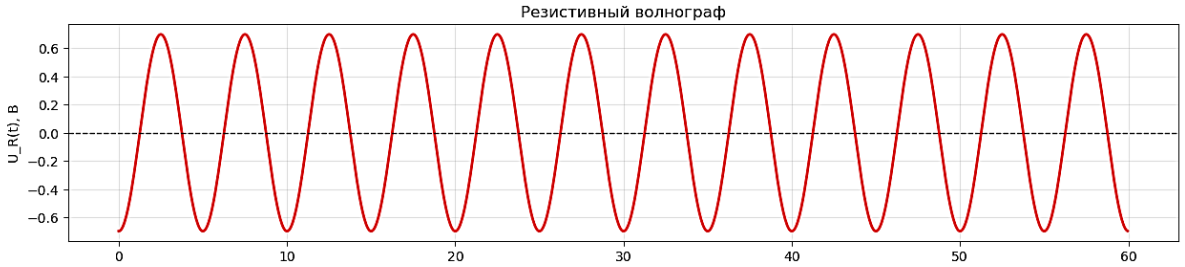
$S = \pi r^2$ *— сечение струны*



Моделирование уровня волнения



Моделирование скорости изменения уровня волнения



Моделирование сигнала резистивного волнографа в низкочастотном режиме



Моделирование скорости сигнала резистивного и емкостного волнографа в низкочастотном режиме

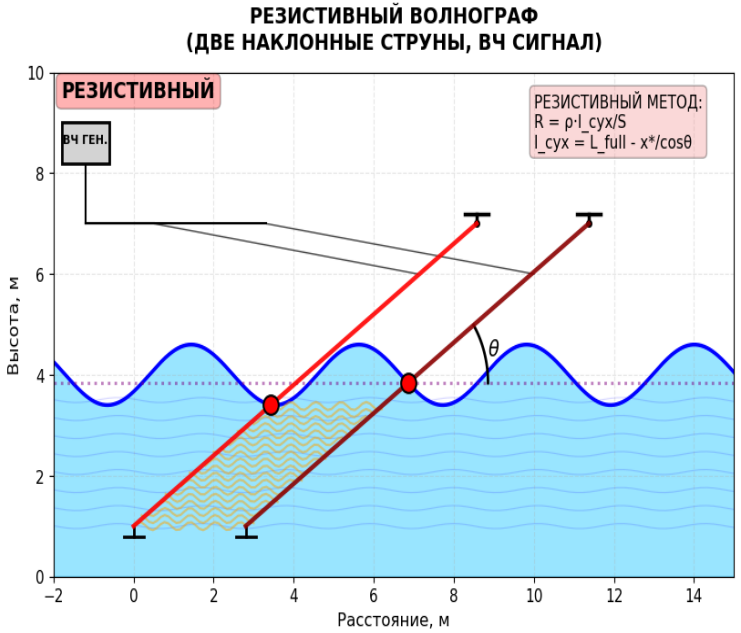


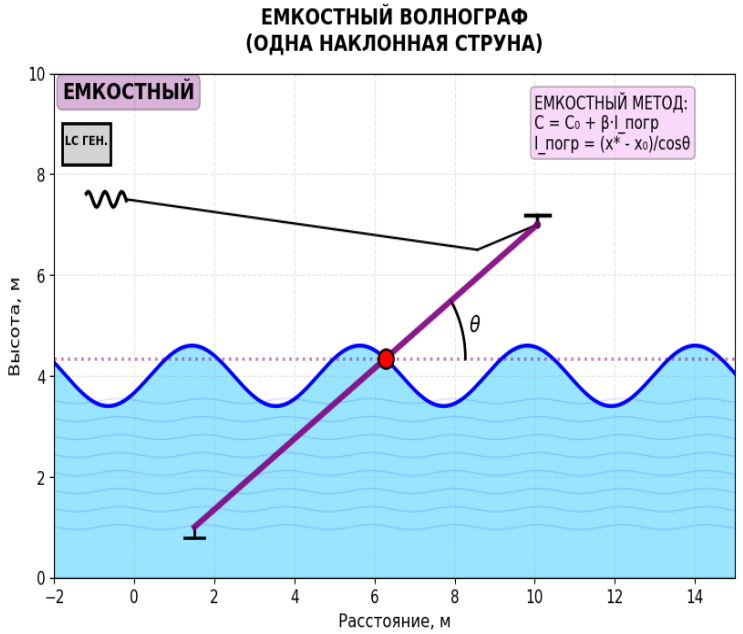
Моделирование сигнала емкостного волнографа в низкочастотном режиме

На графиках представлены результаты моделирования сигнала для волнографа в низкочастотном режиме от времени.

Взяв производную от полученного сигнала, получим вертикальную составляющую орбитальной скорости.

Наклонный резистивный и емкостный волнограф в пресной воде. Линейное приближение





При наклонной установке положение точки пересечения зависит от локального наклона поверхности. Поэтому измеряемый сигнал может зависеть как от вертикального движения поверхности, так и от горизонтального переноса волнового профиля.

$$y_{струна}(x) = b \cdot x$$

$$\eta(x,t) = A \cdot cos\,(\omega t - kx)$$

точка пересечения:

$$x^*(t) = \frac{A}{b} \cdot cos\,(\omega t - kx^*(t))$$

Это уравнение можно решать итеративно. Рассмотрим начальное приближение: $x_0=0$

Для малых A и малых k можно ограничиться первым приближением

$$x_1 = \frac{A}{b} cos\,(\omega t)$$

$$x_2 = \frac{A}{b} cos\,(\omega t - kx_1) \text{ и т.д.}$$

$$\boxed{x^*(t) \approx \frac{A}{b} cos\,(\omega t)}$$

Это грубое приближение, если k большой

Решения для наклонного волнографа. Низкочастотный режим.

$$L_{\text{струны}} = \frac{L_x}{cos\ \theta} \qquad l_{\text{погр}}(t) = \frac{\frac{L_x}{2} + x^*(t)}{cos\ \theta} \qquad l_0 = \frac{L_{\text{полн}}}{2},\ \Delta l(t) = \frac{x^*(t)}{cos\ \theta}$$

$$k_{\text{геом}} = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{d}{r}\right)$$

Резистивный случай

$$\mathrm{R(t)} = \rho\frac{L_{\text{полн}}}{S} - \frac{\rho}{S}\cdot\frac{L_{\text{полн}}}{2} - \frac{\rho}{\mathrm{Scos}\,\theta}\cdot x^*(t) + \frac{L_{\text{полн}}}{2}\cdot\frac{k_{\text{геом}}}{\sqrt{\sigma^2+(\omega\varepsilon)^2}} + \frac{k_{\text{геом}}}{\cos\theta\sqrt{\sigma^2+(\omega\varepsilon)^2}}\cdot x^*(t),$$

$$\mathrm{R(t)} = \frac{R_{max}}{2} - \left(\frac{\rho}{\mathrm{Scos}\,\theta} - \frac{k_{\text{геом}}}{\cos\theta\sqrt{\sigma^2+(\omega\varepsilon)^2}}\right)\cdot x^*(t),$$

$$R_{max} = \rho\frac{L_{\text{полн}}}{S} + L_{\text{полн}}\cdot\frac{k_{\text{геом}}}{\sqrt{\sigma^2+(\omega\varepsilon)^2}}$$

$$U_R = I_R\frac{R_{max}}{2} + K_R\cdot x^*(t)$$

$$K_R = -\frac{\rho I_R}{\mathrm{Scos}\,\theta} + \frac{k_{\text{геом}} I_R}{\cos\theta\sqrt{\sigma^2+(\omega\varepsilon)^2}}$$

$x^*(t)$ - *точка пересечения струны с поверхностью воды*
$L_{\text{полн}}$ — *полная длина струны*
K_R, K_{C} — *чувствительность*
I_R, I_{C} — *ток*
$R_{\max}$ — *сопротивление при струне полностью над водой*
θ — *угол наклона струны*
d — *расстояние от струны до заземлённого экрана*
$S = \pi r^2$ — *сечение струны*

Емкостный случай

$$U_c(t) = I_c\cdot\frac{\frac{\left(\frac{L_{\text{полн}}}{2} + \frac{x^*(t)}{cos\ \theta}\right)\cdot k_{\text{геом}}}{\sigma}}{\sqrt{1 + (2\pi f(\mathrm{C_0} + \beta\cdot\left(\frac{L_{\text{полн}}}{2} + \frac{x^*(t)}{cos\ \theta}\right))\frac{\left(\frac{L_{\text{полн}}}{2} + \frac{x^*(t)}{cos\ \theta}\right)\cdot k_{\text{геом}}}{\sigma})^2}}$$

$$U_c(t) = I_c\cdot\frac{\frac{(l_0 + \Delta l(t))\cdot k_{\text{геом}}}{\sigma}}{\sqrt{1 + (2\pi f(\mathrm{C_0} + \beta\cdot(l_0 + \Delta l(t)))\frac{(l_0 + \Delta l(t))\cdot k_{\text{геом}}}{\sigma})^2}}$$

$$D(\Delta l) = 2\pi f(k_{\text{геом}}/\sigma)\cdot(\mathrm{C_0} + \beta\cdot\left(l_0 + \Delta l(t)\right))(l_0 + \Delta l(t))$$

$$D_0 = 2\pi f l_0(k_{\text{геом}}/\sigma)\cdot(\mathrm{C_0} + \beta l_0)$$

$$K_{\mathrm{C}} = \frac{I_c k_{\text{геом}}}{\sigma\cos\theta}\cdot\frac{1 + {D_0}^2 - l_0 D_0\cdot 2\pi f(k_{\text{геом}}/\sigma)\cdot(\mathrm{C_0} + \beta l_0)}{(1 + {D_0}^2)^{3/2}}$$

Рассмотрим низкочастотный режим.

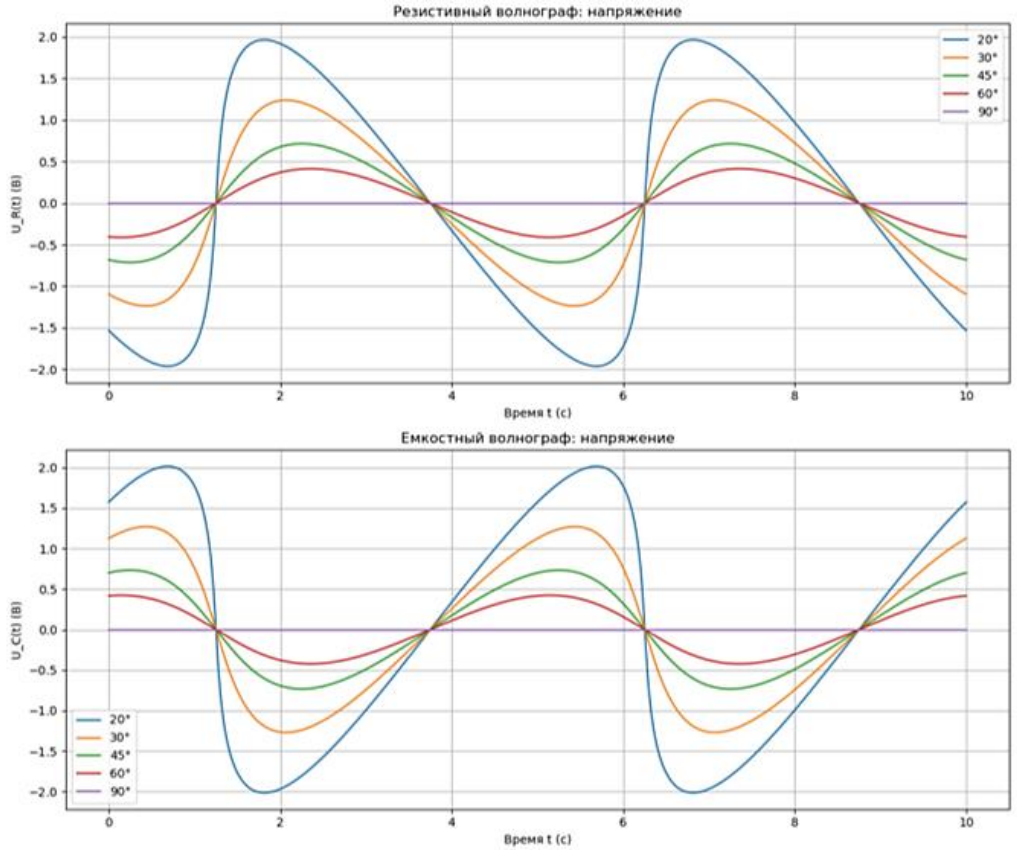
Для резистивного волнографа:

$$U_R = 4.61 - \frac{1.428}{\cos\theta} \cdot x^*(t)$$

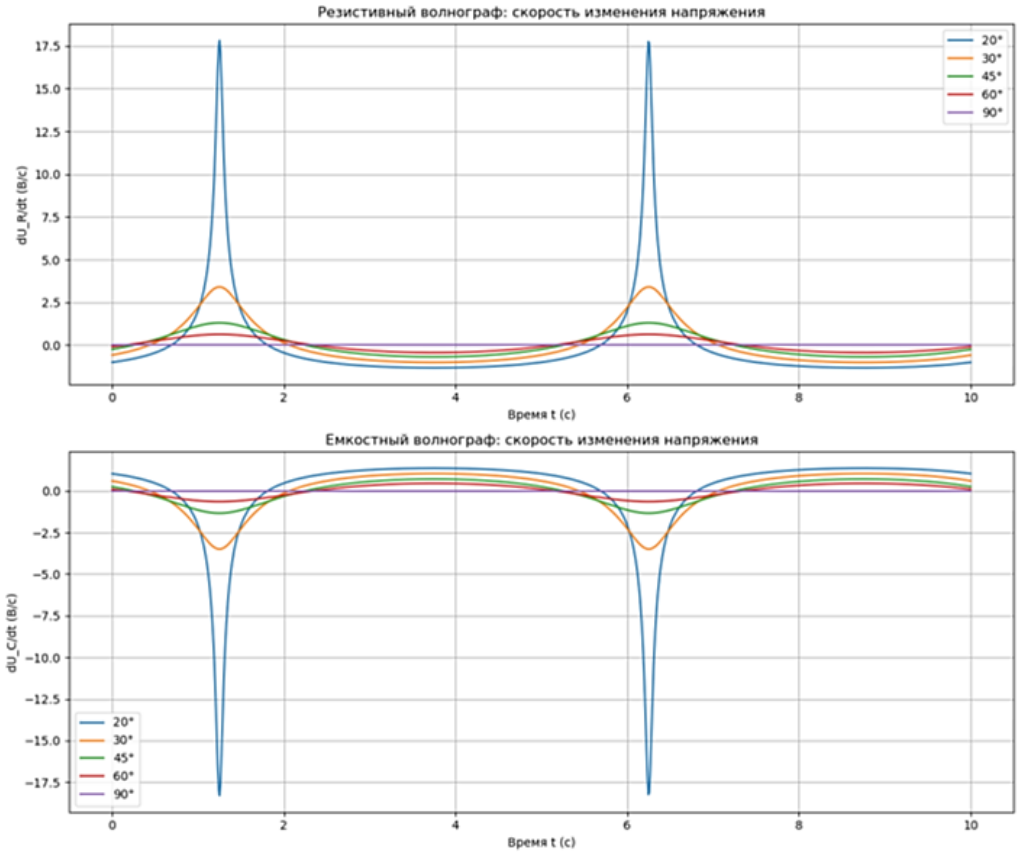
Здесь представлено точное численное решение

Для емкостного волнографа:

$$U_c = 4.4 + \frac{1.466}{\cos\theta} \cdot x^*(t)$$

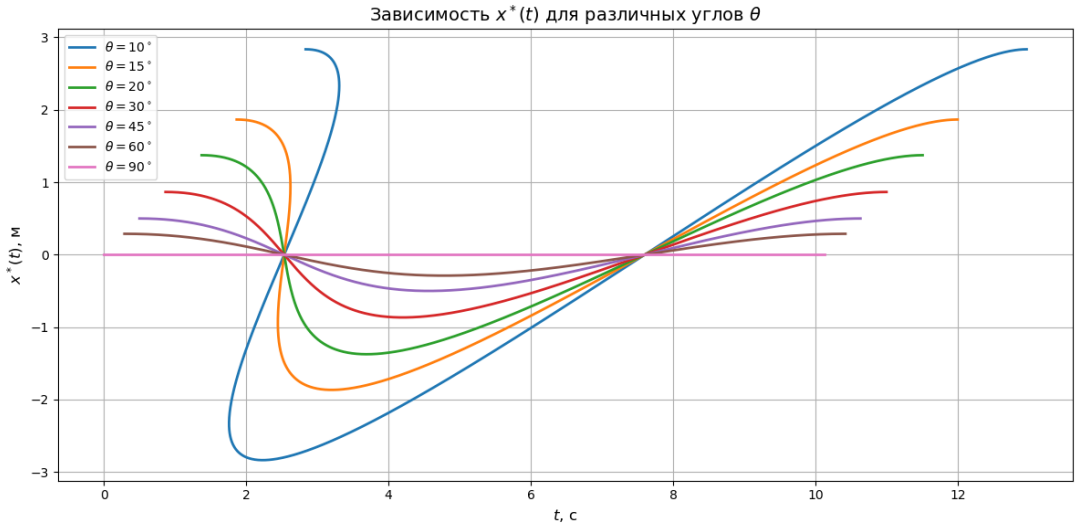


Моделирование сигнала для резистивного и емкостного волнографа в низкочастотном режиме при разных углах (20, 30, 45, 60 градусов и вертикальный случай)



Моделирование скорости сигнала для резистивного и емкостного волнографа в низкочастотном режиме при разных углах (20, 30, 45, 60 градусов и вертикальный случай)

Параметрическое решение



Решение трансцендентного уравнения для различных углов наклона (10, 15, 20, 30, 45, 60 градусов и вертикальный случай)

- В исследуемой модели наблюдается неоднозначность пересечения.
- При увеличении угла наклона решение становится однозначным.
- Следовательно, необходимо определить пороговый угол, обеспечивающий однозначность измерений.

Уравнение $x^*(t) = \frac{A}{b} \cdot \cos(\omega t - kx^*(t))$ смешивает временную динамику (ωt) и пространственную структуру волны ($-kx*$).

Это уравнение можно решить параметрически. Для этого введем новую переменную:

$$u = \omega t - kx^*(t)$$

Тогда из исходного уравнения имеем:

$$x^*(t) = \frac{A}{b} cos\ u$$

Подставим это выражение обратно в определение u:

$$u = \omega t - k\frac{A}{b} cos\ u$$

Выражаем t через u:

$$\omega t = u + k\frac{A}{b} cos\ u$$

$$t(u) = \frac{1}{\omega}(u + k\frac{A}{b} cos\ u)$$

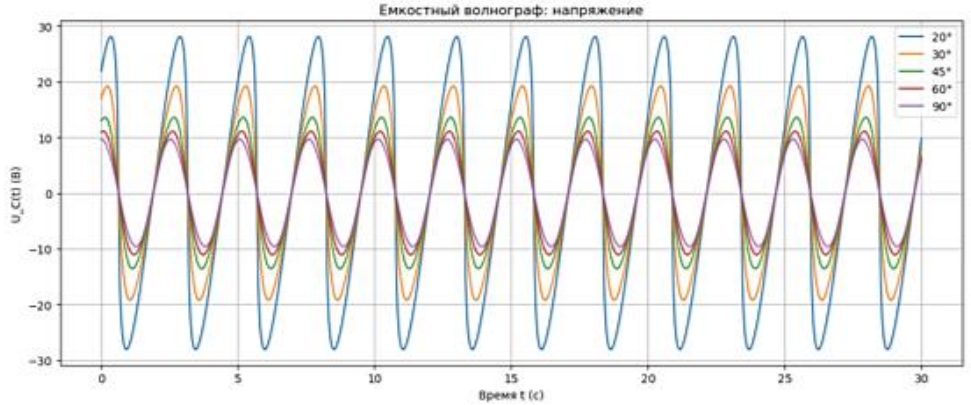
Получили пару функций одного параметра u:

$$\begin{cases} t(u) = \frac{1}{\omega}(u + k\frac{A}{b} cosu) \\ x^*(t) = \frac{A}{b} cosu \end{cases}$$

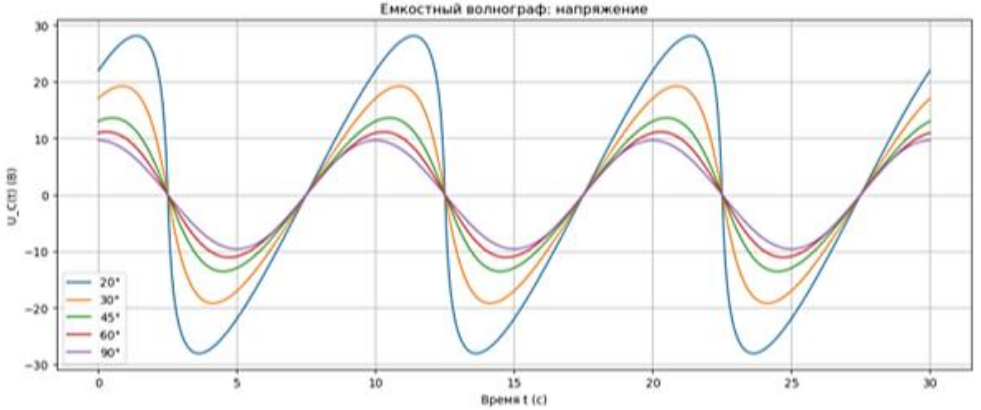
При изменении u от 0 до 2π мы получаем кривую $x^*(t)$.

Возьмем для нее параметры: $A = 0.5$ м, $b = \tan\theta$, $\lambda = 10$ м, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $f = 0.1$ Гц, $\omega = 2\pi f$.

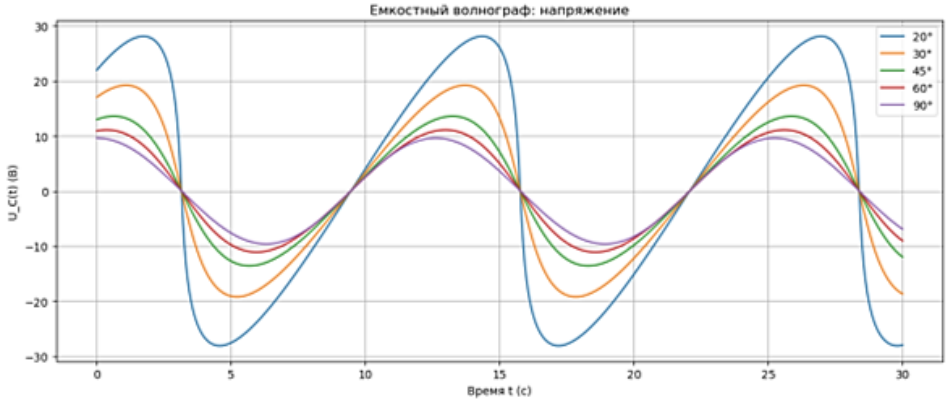
Разное дисперсионное соотношение



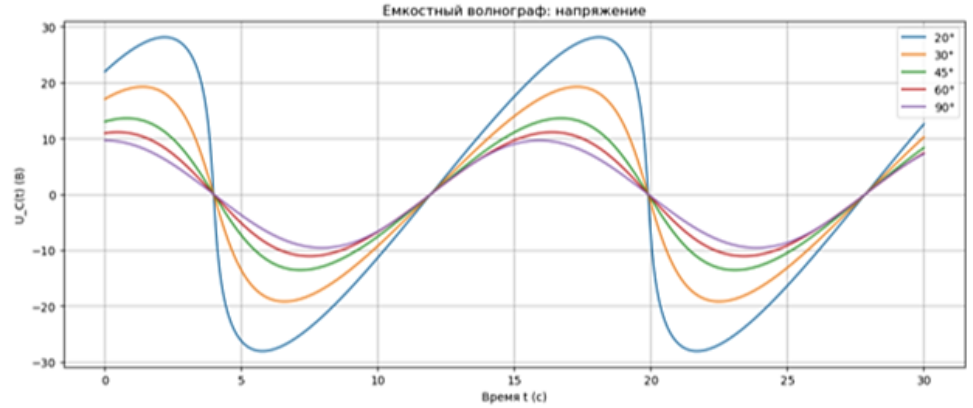
Моделирование сигнала емкостного наклонного волнографа для дисперсионного соотношения $\omega^2 = \mathrm{kg}$ *для разных углов (20, 30, 45, 60, 90 градусов)*



Моделирование сигнала емкостного наклонного волнографа для дисперсионного соотношения $\omega \sim \mathrm{k}$ *для разных углов (20, 30, 45, 60, 90 градусов)*



Моделирование сигнала емкостного наклонного волнографа для дисперсионного соотношения $\omega \sim \mathrm{k}^{3/2}$ *для разных углов (20, 30, 45, 60, 90 градусов)*



Моделирование сигнала емкостного наклонного волнографа для дисперсионного соотношения $\omega \sim \mathrm{k}^2$ *для разных углов (20, 30, 45, 60, 90 градусов)*

Рассматриваем разные зависимости в дисперсионных соотношениях и как от них зависит сигнал

Связь вертикального и горизонтального движения

Вертикальный волнограф регистрирует изменение уровня поверхности в фиксированной точке:

$$\eta(x,t) = A \cdot cos\,(\omega t - kx), \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Здесь w — вертикальная скорость движения поверхности. Для определения горизонтальной скорости частиц воды u одной этой величины недостаточно: необходимо учитывать пространственную структуру волны.

Для волны конечной глубины h потенциал скорости имеет вид:

$$\Phi\,(x,y,t) = \frac{A\omega}{k}\frac{\cosh\,(k\cdot(y+h))}{\sinh\,(kh)}\sin\,(\omega t - kx) \qquad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Горизонтальная скорость частиц жидкости у поверхности имеет вид:

$$u(x,0,t) = -A\omega \cdot \coth\,(kh) \cdot \cos\,(\omega t - kx)$$

Вертикальная скорость поверхности:

$$w(x,0,t) = A\omega \cdot \sin\,(\omega t - kx)$$

Следовательно, вертикальная и горизонтальная скорости связаны через параметры волны.

Что меняется для наклонного волнографа?

Он регистрирует не горизонтальную скорость частиц жидкости, а движение точки пересечения поверхности воды со струной. Из геометрии пересечения:

$$x^*(t) \cdot \tan\,(\theta) = \eta(x^*,t)$$

После дифференцирования по времени получаем:

$$v_* = \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta_t}{\tan(\theta) - \eta_x}$$

η_t — локальная скорость изменения уровня

η_x — локальный пространственный уклон поверхности.

Таким образом, движение точки пересечения зависит и от вертикального движения поверхности, и от её пространственного наклона. Чтобы по наклонному волнографу оценить горизонтальную скорость частиц воды, необходимо дополнительно использовать модель волны и дисперсионное соотношение.

Локальные и нелокальные характеристики

Проблема: вертикальный и наклонный волнографы нельзя расположить в одной точке, поэтому измеренная вертикальным датчиком скорость не будет автоматически соответствовать состоянию поверхности в точке измерения наклонного датчика.

Локальные характеристики	*Нелокальные фиксированные характеристики*
Это величины, зависящие от положения датчика и текущего состояния поверхности. • Мгновенное возвышение поверхности η (x,t). • Вертикальная скорость поверхности η_t (x,t). • Пространственный уклон поверхности η_x (x,t). • Локальная амплитуда, если волна меняется по пространству. • Фаза волны в данной точке.	Для стационарного или квазистационарного волнового процесса в однородной среде к переносимым параметрам относятся: • Период T и частота f; • Круговая частота ω; • Длина волны λ и волновое число $k=2\pi/\lambda$; • Для нерегулярного волнения — спектральные частоты и соответствующие им волновые числа.

Выводы:

1. Разработана модель наклонного струнного волнографа, связывающая выходной электрический сигнал с пространственно-временными характеристиками поверхностного волнения.

2. При малых углах наклона струны возможно неоднозначное определение точки пересечения с поверхностью. Условие однозначности связано с соотношением угла наклона струны и локального уклона волнового профиля.

3. Наклонный волнограф регистрирует движение точки пересечения струны с поверхностью, которое не совпадает непосредственно с горизонтальной скоростью частиц жидкости. Совместное использование вертикального и наклонного волнографов с учётом дисперсионного соотношения позволяет восстановить горизонтальную скорость, что нужно подробнее исследовать.

4. Использование нескольких наклонных волнографов с разными углами наклона позволяет разделить вклад временного изменения поверхности и её пространственного уклона, что открывает возможность определения фазовой скорости и оценки дисперсионного соотношения.

Дальнейшие планы:

1. Разработка алгоритма определения дисперсионного соотношения для поверхностной волны.

2. Проведение измерений в лабораторных условиях и сравнение реальных сигналов резистивного и емкостного волнографов с рассчитанными.

3. Исследование возможности совместного использования вертикального и наклонного волнографов для восстановления горизонтальной скорости частиц жидкости.

4. Развить математическую модель наклонного волнографа для нерегулярного ветрового волнения с учётом пространственного распределения уклонов поверхности.

5. Продолжить исследование системы из нескольких наклонных волнографов с различными углами наклона для определения фазовой скорости и оценки дисперсионного соотношения.

6. Анализ влияния реальной формы волн (несинусоидальных, нелинейных) на сигнал наклонного волнографа.

7. Проведение экспериментов на Горьковском водохранилище для оценки точности предложенного подхода и проверки результатов моделирования.